EXERCICE N°4 : | **25'** | **5 points**

Soit f la fonction définie sur [-2,2] par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur [-2,2].

b) Soit F la primitive de f sur [-2,2] qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2) Soit G la fonction définie sur $[0, \pi]$, par $G(x) = F(2 \cos x)$ et ζ_G sa courbe représentative.

a) Montrer que le point $I(\pi/2 , 0)$ est un centre de symétrie de ζ_G.

b) Montrer que pour tout x de $[0, \pi]$, $G(x) = \pi - 2x + \sin(2x)$. En déduire F(1), F(2) et $F(\sqrt{2})$.

EXERCICE N°5 : | **35'** | **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \tan^2(\frac{x}{2})$.

1) a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi[\ : \ f'(x) = \tan(\frac{x}{2})(1 + \tan^2(\frac{x}{2}))$.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

c) Calculer $f^{-1}(1)$.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J et calculer $(f^{-1})'$.

3) Déterminer la primitive F de f sur $[0,\pi[$ tel que $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

4) Pour tout $x > 1$, on pose $g(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x^2-1}}$

a) Montrer que g admet une seule primitive G sur $]1, +\infty[$ tel que $G(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $\psi(x) = f^{-1}(x^2-1)$. Montrer que $\psi'(x) = - g(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in]1, +\infty[\ : \ G(x) = \pi - f^{-1}(x^2-1)$.

5) Soit $h(x) = \frac{1 + x^2}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$.

a) Déterminer en fonction de f^{-1} la primitive H de h sur $]1, +\infty[$ tel que $H(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} + 1$.

b) Dresser le tableau de variation de H.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn